



Wintersemester 2010/2011

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Blatt 1

Aufgabe 1.1. Seien A_1, A_2, B_1, B_2 nicht leere Mengen. Dann

- a. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \cup [(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$
- b. Die Mengen $[(A_1 \setminus A_2) \times B_1], [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)], [(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$ sind paarweise disjunkte.

Aufgabe 1.2.

Seien A_1, A_2, B_1, B_2 nicht leere Mengen. Dann

- a. $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$
- b. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)]$

Aufgabe 1.3.

- a) Sei $\| \cdot \|_1$ die L^1 -Halbnorm. Zeigen Sie, dass es $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g \neq 0$ existiert, so dass $\|g\|_1 = 0$.
- b) Sei $C[0, 1] := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$. Sei $N_0: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, N_0(f) := |f(0)|$. Zeigen Sie, dass N_0 ein Halbnorm in $C[0, 1]$ ist.

Aufgabe 1.4. Seien $I := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid |f| \text{ integrierbar}\}$ und $C[0, 1] := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$. Sei $N_1: I \rightarrow \mathbb{R}, N_1(f) := \int_0^1 |f| dx$.

- a. Zeigen Sie, dass N_1 ein Halbnorm in $C[0, 1]$ ist.

$$\text{Sei } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ und } f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq (1 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} \\ 2nx - 2n(1 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} & \text{falls } (1 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} < x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Sei } F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- b. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy Folge in $C[0, 1]$ (bezüglich N_1) ist.
- c. Zeigen Sie, dass (bezüglich N_1) $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert nach $F \notin C[0, 1]$.



Wintersemester 2010/2011

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis III Tutorium

Lösungsskizze Blatt 1

Aufgabe 1.1.

a.

" $\subset$ ".

Sei $(a_1, b_1) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

Dann $a_1 \in A_1 \wedge b_1 \in B_1$ oder $a_1 \in A_2 \wedge b_1 \in B_2$.

Fall $a_1 \in A_1$ und $b_1 \in B_1$.

Wenn $a_1 \in A_2$, dann $(a_1, b_1) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)$.

Wenn $a_1 \notin A_2$, dann $(a_1, b_1) \in [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$.

Fall $a_1 \in A_2$ und $b_1 \in B_2$.

Wenn $a_1 \in A_1$, dann $(a_1, b_1) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)$.

Wenn $a_1 \notin A_1$, dann $(a_1, b_1) \in [(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$.

Also $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subset [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \cup [(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$.

" $\supset$ ".

Sei $(a_1, b_1) \in [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \cup [(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$.

Dann $a_1 \in (A_1 \setminus A_2) \wedge b_1 \in B_1$ oder $a_1 \in (A_1 \cap A_2) \wedge b_1 \in (B_1 \cup B_2)$ oder $a_1 \in (A_2 \setminus A_1) \wedge b_1 \in B_2$.

Fall $a_1 \in (A_1 \setminus A_2) \wedge b_1 \in B_1$. Dann $(a_1, b_1) \in (A_1 \times B_1) \subset (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

Fall $a_1 \in (A_1 \cap A_2) \wedge b_1 \in (B_1 \cup B_2)$. Dann $a_1 \in A_1 \wedge a_1 \in A_2$ and $b_1 \in A_1 \vee b_1 \in B_2$. Wenn $b_1 \in B_1$, dann $(a_1, b_1) \in (A_1 \times B_1) \subset (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$. Wenn $b_1 \in B_2$, dann $(a_1, b_1) \in (A_2 \times B_2) \subset (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

Fall $a_1 \in (A_2 \setminus A_1) \wedge b_1 \in B_2$. Dann $(a_1, b_1) \in (A_2 \times B_2) \subset (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

Also $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \supset [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \cup [(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$

b.

$$(a_1, b_1) \in [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \implies a_1 \notin A_2 \implies (a_1, b_1) \notin [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)].$$

$$(a_1, b_1) \in [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \implies a_1 \notin A_2 \implies (a_1, b_1) \notin [(A_2 \setminus A_1) \times B_2].$$

$$(a_1, b_1) \in [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \implies a_1 \in A_2 \implies (a_1, b_1) \notin [(A_1 \setminus A_2) \times B_1].$$

$$(a_1, b_1) \in [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \implies a_1 \in A_1 \implies (a_1, b_1) \notin [(A_2 \setminus A_1) \times B_2].$$

$$(a_1, b_1) \in [(A_2 \setminus A_1) \times B_2] \implies a_1 \notin A_1 \implies (a_1, b_1) \notin [(A_1 \setminus A_2) \times B_1].$$

$$(a_1, b_1) \in [(A_2 \setminus A_1) \times B_2] \implies a_1 \notin A_1 \implies (a_1, b_1) \notin [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)].$$

Also, $[(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$, $[(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)]$, $[(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$ sind paarweise disjunkte.

Aufgabe 1.2.

a.

" $\subset$ ".

Sei $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$.

Dann $a \in A_1 \wedge b \in B_1$ und $(a, b) \notin (A_2 \times B_2)$; d.h., $a \in A_1 \wedge b \in B_1$ und $a \notin A_2 \vee b \notin B_2$.

Falls $a \notin A_2$, dann $(a, b) \in [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$.

Falls $a \in A_2$, dann $b \notin B_2$ und so $(a, b) \in [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)]$.

Also $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) \subset [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$

" $\supset$ ".

Sei $(a, b) \in [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$.

Dann $(a, b) \in [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \vee (a, b) \in [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$.

Falls $(a, b) \in [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)]$, dann $a \in A_1$, $b \in B_1$ und $b \notin B_2$; so $(a, b) \notin (A_2 \times B_2)$ und deswegen $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$.

Falls $(a, b) \in [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$, dann $a \in A_1$, $a \notin A_2$ und $b \in B_1$; so $(a, b) \notin (A_2 \times B_2)$ und deswegen $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$.

Also $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) \supset [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$

b.

$$(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \iff$$

$$a \in A_1 \wedge b \in B_1 \text{ and } a \in A_2 \wedge b \in B_2 \iff$$

$$(a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Aufgabe 1.3.

a). Sei g die Charakteristische Funktion von $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ (d.h., $g := 1_{\{0\}}$).

Dann $\|g\|_1 = v(\{0\}) = 0$ und $g \neq 0$.

b).

Sei $f, g \in C[0, 1]$. Dann

$$- N_0(f) = |f(0)| \geq 0.$$

$$- \text{Für } c \in \mathbb{R}, N_0(cf) = |(cf)(0)| = |cf(0)| = |c||f(0)| = |c|N_0(f).$$

$$- N_0(f+g) = |(f+g)(0)| = |f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)| = N_0(f) + N_0(g)$$

Aufgabe 1.4.

a.

Sei $f, g \in C[0, 1]$. Dann

$$- \text{Da } 0 \leq |f|, \text{ dann } 0 \leq \int_0^1 |f| dx = N_1(f).$$

$$- \text{Für } c \in \mathbb{R}, N_1(cf) = \int_0^1 |cf| dx = \int_0^1 |c||f| dx = |c| \int_0^1 |f| dx = |c|N_1(f).$$

$$- \text{Da } |f+g| \leq |f| + |g|, \text{ dann } N_1(f+g) = \int_0^1 |f+g| dx \leq \int_0^1 (|f| + |g|) dx = \int_0^1 |f| dx + \int_0^1 |g| dx = N_1(f) + N_1(g).$$

b.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, die Funktion f_n ist einfach die Vereinigung der Strecken $S_1(n)$, $S_2(n)$ und $S_3(n)$, wo $S_1(n) := [(0, 0), ((1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2}, 0)]$, $S_2(n) := [((1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 1)]$ und $S_3(n) := [(\frac{1}{2}, 1), (1, 1)]$.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \leq m$; OBdA, sei $n \leq m$. Dann $N_1(f_n - f_m) = \int_0^1 |f_n - f_m| dx$ ist die Fläche zwischen den Strecken $S_2(n)$, $S_2(m)$ und $[((1 - \frac{1}{n})\frac{1}{2}, 0), ((1 - \frac{1}{m})\frac{1}{2}, 0)]$. Da diese Fläche kleiner ist als die Fläche unter der Strecke $S_2(n)$, und da solche Fläche $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dann $\forall \varepsilon \exists k \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq k. N_1(f_n - f_m) < \varepsilon$. Also $(f_n)_{n \geq 1}$ ist Cauchy.

c.

Es ist klar dass $F \notin C[0, 1]$. Auf der andere Seite, für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $N_1(f_n - F)$ ist die Fläche unter der Strecke $S_2(n)$. Aber wie wir schon gesagt haben, solche Fläche geht nach Null wenn n nach Unendlich geht. Das bedeutet, $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert nach $F \notin C[0, 1]$ bezüglich N_1 .